Abriß

einer

Einleitung in die beschreibende Geometrie,

von

Dr. *Fasbender*,
Oberlehrer am Gymnasium zu Thorn.

(Aus dem diesjährigen Programme des Gymnasiums zu Thorn.)

Thorn, 1857.

Gedruckt in der Rathsbuchdruckerei.

Vorbemerkung.

An der Stelle der dem jährlichen Schul-Programme beizugebenden wissenschaftlichen Abhandlung erscheint dies Mal die Bearbeitung eines Zweiges eines Lehr-Gegenstandes. Dieselbe ist hervorgerufen durch die Rücksicht auf den in den hiesigen Real-Klassen zu ertheilenden Zeichen-Unterricht. Es erschien wünschenswerth, den Schülern, welche an diesem Theil nehmen, eine gedruckte Uebersicht der darin behandelten einleitenden Begriffe und Darstellungen aus der beschreibenden Geometrie in die Hand zu geben. Es würde sich wenig empfehlen, wenn man zu diesem Zwecke den Schülern zumuthen wollte, sich ein vollständiges Compendium einer Wissenschaft anzuschaffen, von welcher ihnen für's Erste nur die Anfangsgründe gegeben werden sollen. Im Interesse jenes Unterrichtes hat daher der Verfasser es übernommen, diesen Abriß einer Einleitung in die beschreibende Geometrie auszuarbeiten und durch das diesjährige Schul-Programm zu veröffentlichen. Als Leitfaden für den Unterricht soll derselbe nicht dienen. Sein Zweck ist nur, dem Schüler dazu behülflich zu sein, daß er das im Unterricht Gehörte einem gründlichen häuslichen Studium

unterwerfe und sich durch vielfache Uebung und Anwendung zur Geläufigkeit bringe. Der Verfasser hat, indem er das zu bearbeitende Material auswählte, nicht die Absicht gehabt, Alles, was in diesem Kreise zur Betrachtung kommt, vollständig zu erschöpfen. Eben so wenig hat er das Ausgewählte in einer Weise bearbeitet, welche als Ziel lediglich die deutliche Einsicht des Gegebenen vor Augen hat. Er hat vielmehr, namentlich in den späteren Paragraphen, dahin gestrebt, dem Schüler Gelegenheit zu geben, daß er sich das Gelernte durch vielfache Anwendung zum vollen Eigenthum mache, und auch hierdurch auf einem bestimmt begrenzten Gebiete des Wissens ganz heimisch werde. Hat der Schüler es dahin gebracht, daß er denjenigen Kreis, welchen das Nachstehende ihm vorführt, vollkommen beherrscht; so ist er im Besitze aller derjenigen Vorkenntnisse, welche ihn zu weiterer Thätigkeit auf diesem Gebiete befähigen. —

§. 1.

Allgemeine Weise der Darstellung.

Die Punkte, Linien und Winkel, welche in der beschreibenden Geometrie zur Betrachtung kommen, liegen nicht alle in ein und der nämlichen Ebene. Zur Darstellung ihrer Lage ist demnach die gewöhnliche Weise der Planimetrie nicht ausreichend. Man bedient sich hierzu **zweier als unveränderlich und unbegrenzt gedachter, auf einander senkrechter Ebenen.** Die Lage der darzustellenden Gegenstände ist durch die Lage von Punkten und Linien, welche in der einen oder der andern dieser beiden Ebenen liegen, in irgend einer Weise bedingt. Es ist alsdann jedes Mal nur erforderlich, die Lage der Punkte und Linien in den beiden festen Ebenen, so wie die Art zu kennen, wie die darzustellenden Gegenstände und deren gegenseitige Beziehungen von ihnen abhängig sind. Die speciellere Ausführung des hierher Gehörenden ist der Gegenstand dieser Einleitung. Diese wird daher zunächst darauf ausgehen müssen, in Betreff der zur Darstellung dienenden unveränderlichen Ebenen selbst und der in ihnen liegenden Punkte und Linien das Erforderliche zu erläutern.

§. 2.

Die Projektions-Ebenen; Lage von Punkten und Linien in ihnen.

Die beiden vorhin bezeichneten unveränderlichen, auf einander senkrechten Ebenen nennt man die **Projektions-Ebenen,** ihre Durchschnitts-Linie die **Projektions-Axe.** Jede dieser beiden Ebenen wird in der beschreibenden Geometrie durch die Ebene

der Zeichnung vorgestellt. Damit hierüber dem Anfänger gleich zum Beginne die richtige Auffassung werde, denke sich derselbe einstweilen jede der beiden Projektions-Ebenen nach der einen Richtung hin von der Projektions-Axe begrenzt und nur nach der anderen Richtung hin unbegrenzt. Von den vier um die Projektions-Axe liegenden rechten Flächenwinkeln kommt somit einstweilen nur ein einziger in Betracht. Von den beiden Projektions-Ebenen werde nun die eine horizontal gedacht; sie heißt die **Horizontal-Ebene** und fällt wirklich mit der Ebene der Zeichnung zusammen. Die in ihr liegende Projektions-Axe sei die Linie MN (Fig. 1). Durch diese geht die andere Projektions-Ebene und steht senkrecht auf der vorigen; sie heißt die **Vertikal-Ebene.** Die Horizontal-Ebene möge sich von MN nach der rechten Hand unbegrenzt erstrecken, so daß ihr von MN links liegender Theil einstweilen außer Betracht bleibt. Gleicher Weise soll von der Vertikal-Ebene für's Erste nur ein Theil betrachtet werden, derjenige Theil nämlich, welcher auf der dem Beobachter zugewendeten Seite der Horizontal-Ebene liegt. — Hiernach würde nun zwar die Darstellung von Punkten und Linien, welche in der Horizontal-Ebene liegen, keine Schwierigkeit haben, weil diese Ebene mit der Ebene der Zeichnung zusammenfällt. Um aber auch in der Vertikal-Ebene das Nöthige angeben zu können, benutzt man den an der andern Seite von MN liegenden Theil der Papier-Ebene. Wenn nämlich die Vertikal-Ebene um die Linie MN nach links hin um einen rechten Winkel gedreht wird, so fällt sie mit diesem Theile der Ebene des Papiers zusammen, und bildet gerade den noch unbenutzt gebliebenen Theil derselben. Jeder Punkt und jede Linie, welche sich irgend wo in der Vertikal-Ebene befindet, liegt jetzt in der Ebene der Zeichnung. Offenbar ist die Angabe über letztere Lage ausreichend, um die ursprüngliche Lage in der Vertikal-Ebene unzweifelhaft festzustellen. Demnach wird nun die Lage eines Punktes oder einer Linie in der Vertikal-Ebene dadurch bestimmt, daß man angiebt, wo sie in der Ebene des Papiers liegen werden, nachdem man die oben beschriebene Drehung ausgeführt hat.

Die **Darstellung der Punkte und Linien in den beiden Projektions-Ebenen** wäre nun sehr einfach, wenn nicht in einzelnen Fällen die Nothwendigkeit einträte, auch Punkte und Linien, welche in den weggelassenen Theilen beider Ebenen liegen, darzustellen. Das hierbei zu beobachtende Verfahren gründet sich auf folgende Ueberlegung: Der weggelassene

Theil der Vertikal-Ebene fällt nämlich, nach Ausführung der Drehung, mit der Horizontal-Ebene rechts zusammen; ferner fällt der weggelassene Theil der Horizontal-Ebene mit demjenigen Theile der Papier-Ebene zusammen, in welchem nach der Drehung die Vertikal-Ebene liegt. Ein in der Ebene der Zeichnung angegebener Punkt liegt nun entweder in der ganz unbegrenzt gedachten Horizontal-Ebene, oder er liegt, nach Ausführung der oben beschriebenen Drehung, in der ganz unbegrenzt gedachten Vertikal-Ebene. Im ersten Falle soll derselbe durch einen, an den betreffenden Buchstaben gesetzten Accent, im letzteren Falle durch zwei Accente bezeichnet werden. In Figur 1 z. B. liegt A′ in dem rechts gelegenen Theile, B′ in dem links gelegenen Theile der Horizontal-Ebene. Der Punkt C″ liegt in dem oberen, der Punkt D″ in dem unteren Theile der Vertikal-Ebene. — Liegt ein Punkt in der Projektions-Axe, so kann der betreffende Buchstabe ohne Accent geschrieben werden.

Da die **Lage einer geraden Linie** durch zwei Punkte gegeben wird, diese aber nach dem Vorigen unzweideutig bestimmt werden können, so bedürfte es einer weiteren Angabe in Betreff der geraden Linie nicht. Allein in einzelnen Fällen sind Linien unabhängig von den in ihnen liegenden Punkten zu betrachten; darum ist auch hierin eine Unterscheidung angemessen. Demnach sollen diejenigen Linien, welche in den zuerst betrachteten Theilen der beiden Projektions-Ebenen liegen, ganz ununterbrochen; Linien hingegen, welche in dem links gelegenen Theile der Horizontal-Ebene und in dem unteren Theile der Vertikal-Ebene liegen, nur punktirt dargestellt werden. Hiernach möge sich der Anfänger die Lage der in der Figur 2 gezeichneten Linien klar zu machen suchen.

Nachdem nun angegeben ist, wie die Lage von Punkten und Linien, die in den beiden Projektions-Ebenen liegen, bestimmt wird, kommt es jetzt darauf an, zu untersuchen, in welcher Weise Punkte und Linien, welche außerhalb der beiden Projektions-Ebenen liegen, von jenen und unter einander abhängig sind, und wie diese Abhängigkeit durch die Zeichnung dargestellt wird. In den meisten hierbei vorkommenden Fällen wird die Lage der Punkte und Linien so gewählt werden, daß sie sich in dem rechts liegenden

Theile der Horizontal-Ebene, oder in dem oberen Theile der Vertikal-Ebene darstellen lassen. Dem Anfänger ist jedoch zu rathen, sich auch mit der in entgegengesetzten Fällen anzuwendenden Behandlungsweise vertraut zu machen. Zu diesem Zwecke hat der Verfasser einzelne Figuren in mehrfacher Zeichnung gegeben. Diese Zeichnungen sind dann durch übereinstimmende Nummern, mit Sternchen versehen, angezeigt worden.

§. 3.

Bestimmung des Punktes.

Liegt ein Punkt A außerhalb jeder der beiden Projektions-Ebenen, so fällt man aus ihm auf jede derselben ein Loth. Die hierdurch erhaltenen beiden Lothe AA′ und AA″ nennt man die projicirenden Linien, ihre Fußpunkte A′ und A″ (Fig. 3) nennt man die **Projektionen,** und zwar A′ **die horizontale,** A″ die **vertikale Projektion des Punktes** A. Eine durch die beiden projicirenden Linien AA′ und AA″ gelegte Ebene schneidet die Projektions-Axe in dem Punkte P. Diese Ebene steht, da sie durch beide Lothe geht, auf jeder der beiden Projektions-Ebenen, also auch auf deren Durchschnitte, der Projektions-Axe, senkrecht. Hiernach erweisen sich die beiden Winkel MPA′ und MPA″ als Rechte. Wird demnach der in der Vertikal-Ebene liegende Punkt A″ auf die im vorigen Paragraphen angegebene Art in der Ebene der Zeichnung dargestellt, so muß der Winkel A′PA″ als ein Flacher erscheinen. Hieraus folgt ganz allgemein, daß diejenige gerade Linie, welche in der Zeichnung die beiden Projektionen eines gegebenen Punktes verbindet, auf der Projektions-Axe senkrecht stehen muß. Ist von zwei Punkten diese Bedingung nicht erfüllt, so ist es nicht möglich, einen Punkt zu finden, dessen Projektionen sie sind.

Ein Punkt A ist demnach völlig bestimmt durch Angabe seiner beiden Projektionen A′ und A″. Um ihn zu finden, errichtet man im Raume durch jeden der beiden Projektions-Punkte ein Loth auf die betreffende Projektions-Ebene; der Durchschnitt beider Lothe ist der zu bestimmende Punkt. Jedes der beiden Lothe ist der Abstand des Punktes A von einer der beiden Projektions-Ebenen; AA′ ist sein Abstand von der Horizontal-

Ebene, AA″ sein Abstand von der Vertikal-Ebene. Beide Abstände liegen übrigens in dem Parallelogramm AA′PA″, daher wird jener Abstand auch durch die Linie A″P, dieser durch die Linie A′P gegeben. Der Abstand eines Punktes von der Horizontal-Ebene (oder der Vertikal-Ebene) ist demnach gleich dem Abstande seiner vertikalen (resp. horizontalen) Projektion von der Projektions-Axe.

Liegt ein **Punkt in einer der beiden Projektions-Ebenen,** so findet man für seine Projektionen noch spezielle Bedingungen. Liegt er z. B. in der Horizontal-Ebene, so fällt er mit seiner horizontalen Projektion A′ zusammen. Das Loth, welches man aus ihm auf die Vertikal-Ebene fällt, liegt ganz in der Horizontal-Ebene, trifft also jene in einem Punkte der Projektions-Axe; in dieser liegt also seine vertikale Projektion. Um sie zu finden, hat man nur aus A auf MN ein Loth zu fällen, so ist dessen Fußpunkt die gesuchte Projektion. — Ein Aehnliches kann man von den Projektionen eines Punktes erweisen, welcher in der Vertikal-Ebene liegt. — Ein Punkt, welcher in der Projektions-Axe liegt, fällt mit seinen beiden Projektionen zusammen.

In allen Zeichnungen sollen die Projektionen eines Punktes durch den nämlichen Buchstaben, wie dieser selbst, bezeichnet werden. Umgekehrt wird also auch ein auf zweifache Weise accentuirter Buchstabe, wie A′ und A″, die beiden Projektionen des nämlichen Punktes anzeigen, so daß A′A″ auf MN senkrecht steht.

§. 4.

Bestimmung der geraden Linie.

Eine gerade Linie ist durch zwei in ihr liegende Punkte vollständig bestimmt. Die Betrachtung der geraden Linie kann demnach an die des Punktes unmittelbar angeschlossen werden. Die vier Projektionen A′, A″, B′ und B″ (Fig. 4) bestimmen vollständig die durch die beiden Punkte A und B gelegte gerade Linie. Eine allgemeinere Auffassung der geraden Linie jedoch erfordert, daß sie in einer Weise dargestellt werde, bei welcher es nicht auf die Lage von speziell in ihr gegebenen Punkten ankommt. Eine

derartige Darstellung ist die folgende: Man fälle aus einem beliebigen Punkte A der Linie auf die Horizontal-Ebene das Loth AA′, und lege dann eine Ebene, welche gleichzeitig dieses Loth und die gegebene Linie AB enthält. Die Stereometrie beweist, daß diese Ebene auf der Horizontal-Ebene senkrecht steht, und daß in ihr jedes der verschiedenen Lothe liegt, welche aus den einzelnen Punkten der Linie AB auf die Horizontal-Ebene gefällt werden können. Hieraus folgt, daß der Durchschnitt jener Ebene mit der Horizontal-Ebene die horizontalen Projektionen sämmtlicher Punkte der Linie AB enthält, also mit der Linie A′B′ zusammenfällt. — Vollzieht man die nämliche Darstellung, nachdem man an die Stelle der Horizontal-Ebene die Vertikal-Ebene gesetzt hat, so erhält man in dieser die Linie A″B″. — Die Linie A′B′ heißt **die horizontale, A″B″ die vertikale Projektion** von AB. **Beide zusammen bestimmen auf die allgemeinste Weise die Linie** AB, und jede von ihnen enthält die gleichnamigen Projektionen von sämmtlichen Punkten der Linie AB. Die Ebenen AA′B und AA″B heißen die projicirenden Ebenen der Linie AB; sie schneiden sich in eben dieser Linie und stehen bezüglich auf der Horizontal-Ebene und auf der Vertikal-Ebene senkrecht.

Hiernach ist man nun sofort zur Behandlung folgender Fragen im Stande: Woran erkennt man, **ob ein gegebener Punkt in einer gegebenen Linie liegt?** Jede der beiden Projektionen des Punktes muß in der gleichnamigen Projektion der Linie liegen. — Wie **bestimmt man die durch zwei gegebene Punkte zu legende Linie?** Die Verbindungs-Linie von zwei gleichnamigen Punkt-Projektionen ist die gleichnamige Linien-Projektion. — Woran **erkennt man, daß drei gegebene Punkte in gerader Linie liegen?** Je drei gleichnamige Projektionen müssen in gerader Linie liegen.

Für spezielle Lagen einer geraden Linie findet man in Betreff ihrer Projektionen noch besondere Bedingungen. Wir heben einige hervor:

a. **Steht die Linie auf einer der beiden Projektions-Ebenen,** z. B. auf der Horizontal-Ebene, **senkrecht,** so reducirt sich ihre betreffende Projektion auf einen Punkt A′ (Fig. 5). Die andere, hier die vertikale, Projektion, B″P, steht auf der Axe MN senkrecht und geht verlängert durch A′; warum? (Jeder Punkt von B″P ist die vertikale

Projektion eines Punktes, welcher A' als horizontale Projektion hat; vergl. dabei die im §. 3 hierfür angegebene Bedingung.)

b. **Liegt die Linie in einer der beiden Projektions-Ebenen,** z. B. in der Horizontal-Ebene, so fällt sie mit der betreffenden Projektion, hier mit der horizontalen, zusammen. Die andere Projektion fällt mit der Projektions-Axe MN zusammen.

c. **Ist die Linie einer der beiden Projektions-Ebenen,** z. B. der Horizontal-Ebene, **parallel,** so muß sie auch mit ihrer hierin liegenden Projektion parallel sein (indirekt zu beweisen), und es sind die zu dieser hin führenden projicirenden Linien gleich lang. Ein Gleiches gilt demnach (conf. §. 3) auch von den Lothen, welche aus allen Punkten der in der anderen Projektions-Ebene liegenden Projektion auf die Axe MN gefällt werden. Eine Linie, welche mit der einen Projektions-Ebene parallel ist, hat demnach in der anderen Projektions-Ebene eine Projektion, welche der Axe parallel ist. — Ist die Linie mit beiden Projektions-Ebenen, also auch mit der Projektions-Axe MN parallel, so ist dies auch mit ihren beiden Projektionen der Fall. (Wo das Wort „Linie" ohne Adjektivum gebraucht wird, ist immer die gerade Linie zu verstehen; krumme Linien kommen in dieser Schrift nicht vor.)

§. 5.

Durchgangs-Punkte einer Linie.

In einzelnen Fällen handelt es sich speziell um Betrachtung derjenigen Punkte einer geraden Linie, in welchen sie die beiden Projektions-Ebenen schneidet. Diese Punkte heißen die Durchgangs-Punkte der Linie, und zwar unterscheidet man, je nachdem die Horizontal-Ebene oder die Vertikal-Ebene getroffen wird, den **horizontalen und den vertikalen Durchgangs-Punkt.** Ist C' (Fig. 6) der horizontale Durchgangs-Punkt, so können für dessen vertikale Projektion zwei Oerter angegeben werden; diese sind 1) die Linie A''B'', welche die vertikale Projektion eines jeden Punktes der Linie AB enthält; und 2) die Axe MN, welche die vertikale Projektion eines jeden Punktes enthält, welcher in der Horizontal-Ebene liegt. Der Durchschnitt beider Oerter D ist demnach

die vertikale Projektion des horizontalen Durchgangs-Punktes. Dieser Durchgangs-Punkt selbst liegt demnach in dem durch D auf MN errichteten Lothe DC′; er liegt ferner, weil er mit seiner horizontalen Projektion zusammen fällt, in der Linie A′B′; also ist der Durchschnitt beider, C′, der horizontale Durchgangs-Punkt selbst. Das Vorstehende enthält bereits vollständig die Angabe, wie zur **Auffindung des horizontalen Durchgangs-Punktes** zu verfahren ist. Eine einfache Uebertragung zeigt, wie man durch Bestimmung des Punktes E und Errichtung des Lothes EF″ den **vertikalen Durchgangs-Punkt** F″ **findet.** (Man bemerke noch, daß jeder Durchgangs-Punkt auch als der Durchschnitt der Linie selbst mit ihrer gleichnamigen Projektion aufgefaßt werden kann.)

Eine Linie ist offenbar auch dann vollkommen bestimmt, **wenn ihre beiden Durchgangs-Punkte C′ und F″ bekannt sind. Wie findet man in diesem Falle ihre beiden Projektionen?** Schon der Anblick der Figur reicht zur Beantwortung dieser Frage hin.

Ist die Linie AB einer der beiden Projektions-Ebenen parallel, so kann sie mit ihr keinen Durchgangs-Punkt haben. In diesem Falle liefert wirklich dessen Konstruktion kein Resultat. Ist sie z. B. parallel mit der Horizontal-Ebene, so ist ihre vertikale Projektion nach §. 4 parallel mit MN, und der zur Konstruktion des horizontalen Durchgangs-Punktes erforderliche Punkt D existirt nicht. — Aus diesem Grunde kann auch die Linie ihre horizontale Projektion nicht schneiden, sondern muß mit derselben parallel sein.

Wenn die Projektions-Axe MN von einer Linie getroffen wird, so fallen deren beide Durchgangs-Punkte mit dem Treff-Punkte zusammen; dieser liegt dann in beiden Projektionen. Wenn demnach beide Projektionen einer Linie durch den nämlichen Punkt der Projektions-Axe gehen, so geht durch diesen Punkt auch die Linie selbst.

§. 6.

Neigung einer Linie gegen beide Projektions-Ebenen.

Wenn eine Linie eine Ebene schneidet, so bildet sie im Allgemeinen mit denjenigen Linien, welche man durch den Treff-Punkt in der Ebene ziehen kann, Winkel von

verschiedener Größe. Unter allen diesen Winkeln ist derjenige der kleinste, welchen die Linie mit ihrer Projektion bildet; er heißt der **Neigungswinkel der Linie gegen die Ebene.** — Die zur Bestimmung der Durchgangs-Punkte im §. 5 gegebene Konstruktion kann nun zugleich dienen zur Auffindung der Winkel, unter welchen die Linie gegen jede der beiden Projektions-Ebenen geneigt ist. So findet man z. B. den Neigungswinkel zur Horizontal-Ebene, wenn man ein rechtwinkliges Dreieck konstruirt, dessen beide Katheten mit EF″ (Fig. 6) und EC′ gleiche Größe haben. Der an der Kathete EC′ liegende Winkel ist der gesuchte. Zur Begründung des Gesagten stelle sich der Anfänger die ganze Figur in ihrer räumlichen Gestaltung vor. Er wird finden, daß ein rechtwinkliges Dreieck, wie das beschriebene, wirklich vorhanden ist. — Soll der Winkel bestimmt werden, unter welchem die Linie gegen die Vertikal-Ebene geneigt ist, so konstruirt man das Dreieck aus den beiden Katheten DC′ und DF″; der gesuchte Winkel liegt dann an der Kathete DF″.

Es kann schon hier bemerkt werden, daß beide vorhin erhaltenen rechtwinkligen Dreiecke die nämliche Hypotenuse F″C′ haben, und daß diese Hypotenuse den Abstand der beiden Durchgangs-Punkte von einander darstellt. Aus jedem der beiden rechtwinkligen Dreiecke läßt sich auch das Quadrat der Linie F″C′ darstellen als Summe der Quadrate der drei Linien EF″, ED und DC′.

§. 7.

Das Stück einer geraden Linie, welches zwischen zwei gegebenen Punkten derselben liegt, zu bestimmen.

Es ist klar, daß dieses Stück unmittelbar gegeben ist, wenn beide Punkte in der nämlichen Projektions-Ebene liegen. Wir übergehen daher diesen speziellen Fall und gehen von der allgemeinsten Annahme aus, indem wir voraussetzen, daß keiner der gegebenen Punkte A und B in einer der beiden Projektions-Ebenen liegt. Stellt man sich dann vor, daß in der Ebene ABB′A′ (Fig. 7) durch den Punkt A eine Parallele zu A′B′ gezogen werde, welche BB′ in C schneidet, so ist das gesuchte Stück AB die Hypotenuse des

rechtwinkligen Dreieckes ABC. Um dasselbe zeichnen zu können, darf man daher nur dahin sehen, daß beide Katheten dieses Dreieckes gefunden werden. Allein die Kathete AC ist unmittelbar gegeben; sie liegt in dem Parallelogramm ACB'A', ist daher an Länge der Linie A'B' gleich. Die Kathete BC ist gleich der Differenz BB' — CB', oder BB' — AA', folglich gleich B''O — A''P. Diese Differenz aber stimmt, weil A''C'' mit der Axe MN parallel ist, an Größe mit B''C'' überein. Hieraus ergiebt sich für die Konstruktion die folgende Regel: In der Horizontal-Ebene errichte man durch den Punkt B' auf A'B' ein Loth B'D', dessen Länge gleich B''C'', und ziehe A'D', so wird diese die Länge des Stückes AB angeben. Das gesuchte Stück erscheint demnach als die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, welches hat als eine Kathete den Abstand von zwei gleichnamigen Punkt-Projektionen (A'B'), und als andere Kathete die Differenz der nach jenen Projektionen führenden projicirenden Linien (BB' — AA'). — Ganz die nämliche Darstellungsweise kann bezüglich der Ebene ABB''A'' vorgenommen werden. Das Stück AB ist dann Hypotenuse eines Dreiecks, dessen Katheten der Größe nach durch A''B'' und E'B' dargestellt werden. (Wo nach beiden Darstellungsweisen die Differenz von zwei projicirenden Linien genommen werden soll, wird stets vorausgesetzt, daß die Punkte, welchen sie angehören, auf der nämlichen Seite der betreffenden Projektions-Ebene liegen. Befinden sich beide Punkte auf verschiedenen Seiten derselben, so erscheint in der Konstruktion nicht die Differenz, sondern die Summe ihrer projicirenden Linien.) — Wie läßt sich geometrisch nachweisen, daß die Hypotenuse des auf die zweite Weise erhaltenen Dreieckes der Linie A'D' gleich ist? (Der Anfänger mache sich hier klar, daß das Quadrat von A'D' als Summe der Quadrate von dreien in der Zeichnung anzugebenden Linien dargestellt werden kann, und daß die nämlichen drei Quadrate, in anderer Ordnung addirt, zur Summe das Quadrat der Hypotenuse des zweiten Dreieckes geben.)

Liegt einer der beiden gegebenen Punkte in einer der Projektions-Ebenen, z. B. A in der Horizontal-Ebene, so geht die als Kathete zu verwendende Linien-Differenz über in die projicirende Linie des anderen Punktes, hier also BB' (= B''O). Als andere Kathete behält man den Abstand A'B'.

Wie man dasjenige Stück einer geraden Linie, welches zwischen ihren beiden Durchgangs-Punkten liegt, findet, wurde bereits im §. 6 angegeben.

Wie muß man verfahren, wenn man **in der Linie AB einen Punkt suchen soll, dessen Entfernung von A eine vorgeschriebene Länge α hat?** Die Behandlung dieser Frage kann sich sofort an die Haupt-Konstruktion dieses Paragraphen anschließen. Von A′ (Fig. 7) aus schneide man auf A′D′ ein Stück $A'F' = \alpha$ ab, fälle F′G′ senkrecht auf A′B′ und suche zu der horizontalen Projektion G′ die vertikale Projektion G″. Dann ist G der gesuchte Punkt. Um dieses zu beweisen, hat man nur die Gleichung $G'F' = G''H''$ darzuthun, weil unter dieser Voraussetzung wirklich A′F′ oder α als Abstand der beiden Punkte A und G gefunden wird. Nun hat man aber $G'F' : B'D' = A'G' : A'B' = A''H'' : A''C'' = G''H'' : B''C''$, d. i. $G'F' : B'D' = G''H'' : B''C''$, und da $B'D' = B''C''$, so ist auch $G'F' = G''H''$.

§. 8.

Bestimmung der gegenseitigen Lage zweier geraden Linien.

Wenn zwei sich schneidende Linien gegeben sind, so muß die horizontale Projektion ihres Durchschnitts gleichzeitig in den horizontalen Projektionen beider Linien liegen, also mit dem Durchschnitte dieser Projektionen, E′ (Fig. 8), zusammen fallen. Eben so muß der Durchschnitts-Punkt der Linie seine vertikale Projektion in F″, dem Durchschnitte der vertikalen Projektionen der beiden Linien, haben. Damit aber E′ und F″ die beiden Projektionen eines Punktes überhaupt sein können, muß nach §. 3 die Linie E′F″ auf MN senkrecht stehen. Hierin ist das Mittel gegeben, um zu erkennen, **ob zwei durch ihre Projektionen gegebene Linien einen gemeinschaftlichen Punkt haben, und um zugleich die Projektionen dieses Punktes zu bestimmen.** — Es kann hierbei der Fall eintreten, daß zwei gleichnamige Projektionen, z. B. die horizontalen Projektionen, von beiden Linien zusammen fallen. In diesem Falle giebt die Figur unmittelbar nur die ungleichnamige, also hier die vertikale, Projektion des Durchschnittes; allein aus dieser kann man die horizontale Projektion ableiten, da man eine Linie kennt, in welcher die letztere

liegt. — Fallen beide gleichnamige Projektionen zusammen, so ist ein Gleiches in Betreff der Linien selbst der Fall.

Hat man mit Hülfe des Vorigen ermittelt, daß sich die beiden gegebenen Linien nicht schneiden, so ist zu untersuchen, **ob sie parallel sind** oder nicht. Wenn zwei Linien überhaupt parallel sind, so sind auch die projicirenden Ebenen parallel, vermittelst deren sie auf irgend eine dritte Ebene projicirt werden, (die parallele Lage der beiden projicirenden Ebenen zu einander ergiebt sich nämlich nach den Sätzen der Stereometrie daraus, daß zwei sich schneidende Linien der einen Ebene mit zweien sich schneidenden Linien der anderen Ebene parallel sind) und eben so sind dann die Linien parallel, worin die beiden projicirenden Ebenen die dritte Ebene schneiden. Sind demnach die beiden zu betrachtenden Linien parallel, so müssen sowohl ihre horizontalen Projektionen unter einander, als auch ihre vertikalen Projektionen unter einander parallel sein. Ist nicht Beides zugleich der Fall, so können beide Linien nicht parallel sein. Wenn also in einem derartigen Falle schon anderweitig feststeht, daß beide Linien sich nicht schneiden, so können sie nur unter die Bezeichnung „sich kreuzende Linien" fallen, d. h. sie sind Linien, welche, ohne parallel zu sein, sich nicht schneiden, also nicht in ein und der nämlichen Ebene liegen können.

Wie findet man **eine Linie, welche durch einen gegebenen Punkt geht und mit einer gegebenen Linie parallel ist?** — Ihre Projektionen müssen mit den gleichnamigen Projektionen der gegebenen Linie parallel laufen und zugleich durch die gleichnamigen Projektionen des gegebenen Punktes gehen.

§ 9.

Bestimmung des von zwei Linien gebildeten Winkels.

Wenn zwei Linien sich schneiden, so bietet sich zur Bestimmung des von ihnen gebildeten Winkels zunächst das folgende Verfahren dar: Man nimmt in jeder der beiden Linien einen Punkt nach Belieben an; beide Punkte bilden dann nebst dem Durchschnitts-

Punkte beider Linien die drei Ecken eines Dreieckes, welches den verlangten Winkel enthält, und zwar liegt dieser Winkel an jenem Durchschnitts-Punkte. Die drei Seiten des Dreieckes können, indem man die Konstruktion des §. 7 drei Mal anwendet, gefunden und somit das Dreieck, in welchem der verlangte Winkel liegt, gezeichnet werden. Hiermit ist die gestellte Aufgabe in größter Allgemeinheit gelöst. In der Praxis aber wird man den Umstand, daß die bezeichneten beiden Punkte beliebig in den gegebenen Linien anzunehmen sind, benutzen, um durch zweckmäßige Annahme derselben die Ausführung möglichst zu vereinfachen. Dieses geschieht, wenn zwei gleichnamige Durchgangs-Punkte, z. B. die beiden horizontalen, als die Ecken jenes Dreieckes angenommen werden. Es seien B′ (Fig. 9) und C′ diese Punkte, A der Durchschnitt von beiden Linien. Dann ist die Dreiecks-Seite B′C′ unmittelbar gegeben; die beiden Seiten AB′ und AC′ können nach §. 7 gefunden werden, und es ist dabei zugleich einer der dort angegebenen speciellen Fälle eingetreten. Die hierauf sich gründende Konstruktion des Dreieckes AB′C′ und des verlangten Winkels bietet also gar keine Schwierigkeit. Sie bleibe als Stoff zur Uebung dem Leser überlassen.

Dagegen werden wir jetzt eine andere Konstruktion des Dreieckes AB′C′ angeben, welche für die wirkliche Zeichnung in allen Fällen den Vorzug verdienen wird. Fällt man aus dem Durchschnitts-Punkte A in der Ebene AB′C′ auf B′C′ das Loth AD′, und läßt alsdann die Ebene des Dreieckes um die Axe B′C′ drehen, bis sie mit der Horizontal-Ebene zusammenfällt, so bildet AD′ fortwährend mit B′C′ rechte Winkel. Während der Drehung befindet sich also AD′ stets in einer durch den Punkt D′ senkrecht auf B′C′ gelegten Ebene. Wenn nun E′ derjenige Punkt der Horizontal-Ebene ist, mit welchem beim Schlusse der Drehung der Punkt A zusammenfällt, so hat man E′D′ = AD′, und es wird auch E′D′ in jener senkrechten Ebene liegen und mit B′C′ rechte Winkel bilden. Gleichzeitig wird der Punkt A′, die horizontale Projektion von A, in der Linie E′D′ liegen, weil der Punkt A und seine projicirende Linie AA′ in jener auch auf der Horizontal-Ebene senkrechten Ebene AD′E′ liegen. Hieraus ergiebt sich folgende Konstruktion des mit AB′C′ congruenten Dreieckes E′B′C′: Man fälle aus A′ auf B′C′ das Loth A′D′, verlängere dieses Loth über A′ bis E′, so daß D′E′ dem Abstande des Punktes A von

dem Punkte D′ gleich ist. Alsdann giebt der Winkel B′E′C′ die Größe des von beiden Linien gebildeten Winkels an. (Den Abstand des Punktes A von dem Punkte D′ findet man nach Anleitung des §. 7. In der Figur ist der Winkel F′A′D′ gleich einem Rechten und A′F′ = A″P gemacht worden. Ein aus D′ mit dem Radius D′F′ beschriebener Kreis trifft dann die Verlängerung von D′A′ in dem Punkte E′).

Bemerkung. Da das Dreieck B′E′C′ dem Dreiecke B′AC′ congruent ist, so muß man haben B′E′ = B′A, so wie C′E′ = C′A, und es muß möglich sein, unmittelbar aus der Figur diese beiden Gleichungen nachzuweisen. Wir deuten den Beweis der ersten von diesen beiden Gleichungen an: $\overline{B'E'}^2 = \overline{B'D'}^2 + \overline{D'E'}^2 = \overline{B'D'}^2 + \overline{D'F'}^2 = \overline{B'D'}^2 + \overline{D'A'}^2 + \overline{A'F'}^2 = \overline{B'A'}^2 + \overline{A'F'}^2 = \overline{B'A'}^2 + \overline{A''P}^2$, also $\overline{B'E'}^2 = \overline{B'A'}^2 + \overline{A''P}^2$. Der Anfänger hat sich jetzt nur noch klar zu machen, daß die rechte Seite dieser Gleichung das Quadrat der Entfernung der beiden Punkte A und B′ ist.

Wenn zwei Linien sich nicht schneiden, ohne zugleich parallel zu sein, so wird die Verschiedenheit ihrer Richtungen durch einen Winkel angegeben, dessen Schenkel man erhält, wenn man durch einen beliebigen Punkt zu jeder der beiden Linien eine Parallele zieht. Die **Bestimmung dieser Richtungs-Verschiedenheit** kann also mit Hülfe des bis jetzt Erklärten ausgeführt werden.

§. 10.

Bestimmung der Lage einer Ebene.

Wir beginnen hier mit dem allgemeinsten Falle, indem wir annehmen, daß die zu bestimmende **Ebene die Projektions-Axe schneidet.** Sie wird alsdann auch jede der beiden Projektions-Ebenen schneiden, und zwar wird jede der beiden entstandenen Durchschnitts-Linien A′B und BC″ (Fig. 10) jenen Durchschnitts-Punkt B enthalten. Die beiden Linien A′B und BC″ heißen die **Hauptschnitte der Ebene**, und zwar unterscheidet man A′B als den **horizontalen**, BC″ als den **vertikalen Hauptschnitt.** Es ist klar, daß **die Angabe der beiden Hauptschnitte zur Bestimmung der Ebene vollständig hinreicht.**

Die Ebene kann nach ihren beiden Hauptschnitten benannt werden. Mit A′BC″ bezeichnet man also diejenige Ebene, deren Hauptschnitte A′B und BC″ sind.

Wenn hingegen die zu bestimmende Ebene die Projektions-Axe nicht schneidet, vielmehr ihr parallel ist, so kann auch keiner von ihren Hauptschnitten die Projektions-Axe schneiden; in diesem Falle sind beide Hauptschnitte und folglich auch die Ebene selbst mit der Projektions-Axe parallel. — Hierbei kann jedoch der specielle Fall eintreten, daß einer der beiden Hauptschnitte nicht zur Existenz gelangt, dann nämlich, wenn die Ebene noch überdies mit einer der beiden Projektions-Ebenen parallel ist. In diesem Falle hat die Ebene nur mit der anderen der beiden Projektions-Ebenen einen Hauptschnitt. Der Abstand desselben von der Projektions-Axe ist gleich der Entfernung der beiden parallelen Ebenen von einander. Der Hauptschnitt enthält überdies die gleichnamigen Projektionen von sämmtlichen Punkten der gegebenen Ebene.

Zur Uebung: Welche Bedingung wird erfüllt sein, **wenn die Ebene A′BC″ auf einer der beiden Projektions-Ebenen,** z. B. auf der Horizontal-Ebene, **senkrecht steht?** — Da außer der Ebene A′BC″ auch die Vertikal-Ebene senkrecht auf der Horizontal-Ebene steht, so muß auch der Durchschnitt beider, also der Hauptschnitt BC″, auf der Horizontal-Ebene senkrecht stehen, demnach auch mit MN rechte Winkel bilden. (Die Beantwortung gründet sich auf den Satz der Stereometrie: „Zwei Ebenen, welche auf einer dritten senkrecht stehen, haben, wenn sie sich schneiden, einen auf der dritten Ebene senkrechten Durchschnitt.“)

§. 11.

Die Lage einer Linie in einer Ebene.

Ob eine gegebene Linie in einer gegebenen Ebene liegt, kann nach Bestimmung der beiden Durchgangs-Punkte der Linie entschieden werden. Der horizontale Durchgangs-Punkt C′ (Fig. 11) muß nämlich, da er sowohl in der Horizontal-Ebene, als in der gegebenen Linie und darum auch in der gegebenen Ebene liegen soll, in dem

horizontalen Hauptschnitte der Ebene liegen, und aus gleichen Gründen muß der vertikale Durchgangs-Punkt E'' der Linie in dem vertikalen Hauptschnitte der Ebene liegen. — Die Aufgabe, durch eine gegebene Linie eine Ebene zu legen, ist hiernach eine unbestimmte; jede Ebene, deren Hauptschnitte durch die gleichnamigen Durchgangs-Punkte der Linie gehen, erfüllt die Forderung. Man darf demnach nur den Punkt F der Projektions-Axe, in welchem die beiden Hauptschnitte sich treffen, beliebig annehmen; die Ebene C'FE'' ist eine der gesuchten. Zieht man durch die Punkte C' und E'' die Linien A'B' und D''G'' parallel zu MN, so sind auch diese die Hauptschnitte einer durch die gegebene Linie zu legenden Ebene.

Eine Modifikation erleidet das Vorstehende in dem Falle, wenn die gegebene Linie einer der beiden Projektions-Ebenen parallel ist, der betreffende Durchgangs-Punkt also nicht existirt. Man vergegenwärtige sich in dieser Beziehung das, was im vorletzten Absatze des §. 5 erörtert wurde, und nehme wieder, wie dort, an, die Linie sei der Horizontal-Ebene parallel. Nach einem stereometrischen Satze wird dann jede durch sie gelegte Ebene, wenn sie überhaupt die Horizontal-Ebene schneidet, mit dieser einen Durchschnitt liefern, welcher mit der Linie selbst (und darum auch mit ihrer horizontalen Projektion) parallel ist. Wenn also die gegebene, mit der Horizontal-Ebene parallele, Linie in der gegebenen Ebene liegt, so kann dies jetzt daran erkannt werden, daß der horizontale Hauptschnitt der Ebene mit der horizontalen Projektion der Linie parallel ist, der vertikale Hauptschnitt der Ebene aber den vertikalen Durchgangs-Punkt der Linie enthält. Man kann demnach auch jetzt, wenn durch eine gegebene Linie eine Ebene gelegt werden soll, den Punkt der Projektions-Axe, durch welchen die Ebene gehen soll, beliebig annehmen. Auch erhält man den vertikalen Hauptschnitt der Ebene gerade so, wie vorhin. Um aber den horizontalen Hauptschnitt zu erhalten, muß man durch den in der Projektions-Axe angenommenen Punkt eine Linie ziehen, welche mit der horizontalen Projektion der gegebenen Linie parallel ist. (Der Verf. hat absichtlich hierzu keine Figur gegeben. Diese selbst zu entwerfen, wird dem Leser keine Schwierigkeit machen. Er erhält dabei zugleich Gelegenheit, sich manche der bis jetzt behandelten Lehren speziell zu vergegenwärtigen.)

Soll durch zwei gegebene Linien, deren eine die Durchgangs-Punkte A′ (Fig. 12) und B″, die andere die Durchgangs-Punkte C′ und D″ hat, **eine Ebene gelegt werden,** so muß dieselbe A′C′ und B″D″ als Hauptschnitte haben. Die beiden genannten Linien können aber nur dann die Hauptschnitte einer Ebene sein, wenn sie in dem nämlichen Punkte E die Projektions-Axe MN treffen. Alsdann ist A′EB″ die zu legende Ebene. Wenn A′C′ und B″D″ die Axe MN nicht in dem nämlichen Punkte treffen, so folgt hieraus, daß die beiden gegebenen Linien nicht in der nämlichen Ebene liegen. Das Vorstehende giebt also auch noch an, **wie man verfahren muß, um zu entscheiden, ob zwei gegebene Linien in der nämlichen Ebene liegen.** — Frage zur Uebung: **Wie entscheidet man, ob drei durch den nämlichen Punkt gelegte Linien in einer einzigen Ebene liegen?**

Soll **durch drei gegebene Punkte, oder durch eine Linie und einen außerhalb derselben gegebenen Punkt eine Ebene gelegt werden,** so suche man zwei (parallele oder sich schneidende) Linien zu erhalten, welche in der gesuchten Ebene liegen. Nach dem in den §§. 4 und 8 Behandelten hat dies keine Schwierigkeit; die Aufgabe ist dann auf die vorige zurückgeführt. — Zur Ausführung dieser Andeutungen können verschiedene Wege eingeschlagen werden. Auf jedem derselben muß man, wenn die Zeichnung mit Genauigkeit entworfen wurde, zu der nämlichen Ebene gelangen. Soll zum Beispiel durch die drei Punkte A, B und C eine Ebene gelegt werden, so genügt es, die Durchgangs-Punkte von zweien der drei Linien AB, AC und BC zu kennen. Man bedarf sogar nur von einer einzigen Linie, z. B. von AB, beide Durchgangs-Punkte; von einer der anderen, AC, genügt ein, z. B. der horizontale, Durchgangs-Punkt. Sind diese drei angedeuteten Punkte bestimmt, so kann man zuerst den horizontalen, dann auch den vertikalen Hauptschnitt der gesuchten Ebene angeben. Die übrigen Durchgangs-Punkte müssen, wenn bei der Zeichnung keine Ungenauigkeit Statt gefunden hat, diejenige Lage haben, welche zu Anfange dieses Paragraphen gefunden worden ist, d. i. sie müssen in den mit ihnen gleichnamigen Hauptschnitten liegen. Wäre dies nicht der Fall, so würde, den Sätzen der Stereometrie entgegen, durch drei Punkte mehr als eine einzige Ebene gelegt werden können. — Der Anfänger möge darauf aufmerksam sein, daß sich zur **Anwendung derartiger Mittel, durch welche die Genauigkeit einer Zeichnung geprüft werden kann,** in

der beschreibenden Geometrie häufig Gelegenheit darbietet. Es ist dies namentlich in solchen Fällen zu bemerken, wo aus der Verbindung von Linien und Ebenen untereinander neue Punkte entstehen. Die beiden Projektionen eines derartigen Punktes, wie sie in der Zeichnung erhalten werden, müssen dann stets die im §. 3 angegebene Bedingung erfüllen, d. i. ihre Verbindungs-Linie muß auf der Projektions-Axe senkrecht stehen.

Wie kann, **wenn man die eine Projektion einer Linie kennt und überdies weiß, daß die Linie in einer gegebenen Ebene liegt, ihre zweite Projektion gefunden** werden? — Die horizontale Projektion FB′ (Fig. 13) sei bekannt. Dieselbe enthält den horizontalen Durchgangs-Punkt der Linie; dieser aber befindet sich auch in dem horizontalen Hauptschnitte C′D; der gemeinschaftliche Punkt B′ ist also dieser Durchgangs-Punkt. Verlängert man FB′ bis zum Durchschnitte mit MN in F, und errichtet FG″ senkrecht auf MN, so liegt in FG″ der vertikale Durchgangs-Punkt der Linie. Dieser muß aber auch in dem vertikalen Hauptschnitte DE″ liegen; der Durchschnitt G″ ist also der vertikale Durchgangs-Punkt selbst. Da nun die beiden Durchgangs-Punkte der Linie gefunden sind, so kann auch ihre vertikale Projektion G″A ohne Schwierigkeit angegeben werden.

§. 12.

Die Lage eines Punktes in einer Ebene.

Wie **entscheidet man, ob ein gegebener Punkt** A (Fig. 14) **in einer gegebenen Ebene** B′CD″ **liegt?** Man nimmt in der Ebene B′CD″ eine beliebige Linie an, legt dann durch den Punkt A zu dieser Linie eine Parallele, und untersucht nun, ob diese Parallele in der Ebene B′CD″ liegt. Findet man, daß dieses der Fall ist, so muß auch der Punkt A in dieser Ebene liegen; ergiebt sich aber, daß die Parallele nicht in der Ebene B′CD″ liegt, so kann auch der Punkt A nicht in ihr liegen. — Zur Ausführung der vorstehenden Vorschrift setzt der Inhalt der vorhergehenden Paragraphen in Stand. Um dieselbe mit möglichst geringer Mühe zu bewirken, zieht man die durch A zu legende Linie parallel mit einem der beiden Hauptschnitte der Ebene, z. B. mit CB′. Die beiden Projektionen der zu ziehenden Parallelen sind dann leicht zu finden; die horizontale Pro-

jektion geht durch A′ und ist parallel mit CB′; die vertikale Projektion geht durch A″ und ist parallel mit MN. (Warum? Vergl. §. 8; die Linie CB′ hat nämlich die beiden Projektionen CB′ und MN.) Hieraus bestimme man weiter den vertikalen Durchgangs-Punkt E″. Um nun zu entscheiden, ob die durch A gezogene Linie in der Ebene B′CD″ liegt, erwäge man, daß die Linie, weil sie mit B′C parallel, auch mit der Horizontal-Ebene parallel ist. Demnach muß, wenn sie ganz in der Ebene B′CD″ liegen soll, ihre horizontale Projektion parallel sein dem horizontalen Hauptschnitte BC′, und ihr vertikaler Durchgangs-Punkt E″ muß in dem vertikalen Hauptschnitte CD″ liegen. Allein die erste dieser beiden Bedingungen ist schon in Folge der Konstruktion erfüllt. Es ist also nur erforderlich, daß E″ in CD″ liegt; alsdann liegt die Parallele und auch der Punkt A in der Ebene B′CD″. Wir machen hier darauf aufmerksam, daß das angegebene Verfahren einer Mannigfaltigkeit hinsichtlich des Ausdruckes fähig ist. Man kann demselben z. B. auch folgende Fassung geben: Durch A″ ziehe man mit MN eine Parallele, welche CD″ in E″ schneidet, fälle aus E″ auf MN ein Loth E″F, und ziehe FA′; wenn letztere Linie sich mit CB′ parallel ergiebt, so liegt der Punkt A in der Ebene B′CD″. (Wie würde die Konstruktion auszuführen sein, wenn die durch A gelegte Linie nicht mit B′C, sondern mit D″C parallel sein soll? Man nehme mit Rücksicht hierauf die diesem Paragraphen angehängte Bemerkung in Betracht.) Ist die gegebene Ebene mit einer der beiden Projektions-Ebenen parallel, so liegt in ihrem Hauptschnitte mit der anderen Projektions-Ebene auch die gleichnamige Projektion eines jeden ihrer Punkte (§. 10). Die in dieser Aufgabe gestellte Frage ist dann einer unmittelbaren Beantwortung fähig.

Hat man nach §. 11 durch drei gegebene Punkte eine Ebene gelegt, so kann man, mit Hülfe des Vorstehenden, untersuchen, ob jeder der drei Punkte in der gefundenen Ebene liegt. Man besitzt also hierin ein Mittel, sich von der Genauigkeit der dabei ausgeführten Zeichnung zu überzeugen.

Wie kann, **wenn ein Punkt A in einer Ebene B′CD″ liegt, aber nur eine seiner Projektionen bekannt ist, die andere Projektion gefunden** werden? Die Figur 14 giebt die Antwort fast unmittelbar.

Bemerkung. Im Texte dieses Paragraphen wurde schon gesagt, daß man die durch A zu legende Linie auch parallel mit D″C ziehen könne. In diesem Falle ist ihre horizontale Projektion parallel mit MN; sie sei A′G′. Fällt man nun G′H als Loth auf MN und zieht HA″, so muß sich HA″ parallel mit D″C ergeben, wenn der Punkt A in der Ebene B′CD″ liegt. Wenn also Letzteres vorausgesetzt wird, so muß aus den hierfür aufgefundenen Bedingungen auch sofort abgeleitet werden können, daß HA″ parallel mit D″C ist, und zwar muß es möglich sein, die desfallsige Beweisführung unmittelbar auf die Konstruktion, ohne Rücksicht auf Bedeutung und Zweck derselben, zu gründen. Eine solche Beweisführung sei kurz angedeutet: A′G′ = PH = FC, also HF + PH = HF + FC, oder PF = CH; ferner ist PF = A″E″, also hat man auch CH = A″E″. Da aber auch CH parallel mit A″E″ ist, so ist das Viereck CE″A″H ein Parallelogramm. — (Das Zeichen + ist in — zu verwandeln, wenn die Beweisführung auf die Fig. 14* bezogen werden soll.)

§. 13.

Die Lage zweier Ebenen gegen einander.

Sind zwei Ebenen gegeben, so sind sie entweder parallel, oder sie schneiden sich. Parallele Ebenen aber bilden mit jeder beliebigen dritten Ebene parallele Durchschnitte. Wenn daher die beiden Ebenen A′BC″ und D′EF″ (Fig. 15) parallel sind, so muß gleichzeitig A′B parallel mit D′E, und BC″ parallel mit EF″ sein. Ist auch nur eine dieser beiden Bedingungen nicht erfüllt, so können beide Ebenen nicht parallel sein, müssen sich also schneiden. — Fraglich bleibt hierbei, ob jene beiden Bedingungen nothwendig die parallele Lage zweier Ebenen mit sich führen; ob nicht auch dann, wenn sie erfüllt sind, beide Ebenen sich schneiden können. Um die Grenzen dieser Druckschrift nicht zu überschreiten, wollen wir die Beantwortung dieser Frage ohne Begründung geben: Wenn bei Erfüllung jener beiden Bedingungen die Ebenen sich schneiden, so ist deren Durchschnitt mit jedem der vier Hauptschnitte parallel, und jeder von diesen ist dann parallel der Projektions-Axe MN.

Beide Ebenen sind daher jeden Falls parallel, wenn ihre Hauptschnitte die beiden obigen Bedingungen erfüllen und nicht zugleich der Axe MN parallel sind. — Ist von beiden Bedingungen keine erfüllt, so ergeben sich unmittelbar **die Durchgangs-Punkte der Durchschnitts-Linie beider Ebenen; es sind die Punkte** G′ und H″ (Fig. 16), **in welchen die gleichnamigen Hauptschnitte beider Ebenen sich treffen.** Die Projektionen der Durchschnitts-Linie ergeben sich dann nach §. 5. — Wenn dagegen nur eine einzige der beiden Bedingungen unerfüllt ist, wenn z. B. (Fig. 17) BC″ die EF″ in H″ schneidet, dagegen A′B mit D′E parallel ist, so ist der Punkt H″ unzweifelhaft in der Durchschnitts-Linie beider Ebenen belegen. Da aber die beiden Hauptschnitte A′B und D′E parallel sind, so muß (nach dem in der Bemerkung angegebenen Satze der Stereometrie) jeder von ihnen auch parallel sein mit der Durchschnitts-Linie der beiden Ebenen. Demnach hat diese Durchschnitts-Linie eine horizontale Projektion parallel mit A′B, dagegen eine vertikale Projektion parallel mit MN, und da überdies der vertikale Durchgangs-Punkt H″ bekannt ist, so sind die Projektionen selbst leicht anzugeben. Der Leser möge sie in der Zeichnung heraussuchen.

Bemerkung. Warum muß, wenn die horizontalen Hauptschnitte der beiden Ebenen A′BC″ und D′EF″ einander parallel sind, auch die Durchschnitts-Linie der beiden Ebenen mit jedem dieser Hauptschnitte parallel sein? — Man berücksichtige, daß hier drei Ebenen, A′BC″, D′EF″ und die Horizontal-Ebene, sich zu je zweien in drei Linien schneiden. Die Stereometrie lehrt, daß in diesem Falle entweder alle drei Linien parallel sind, oder daß alle drei Linien durch den nämlichen Punkt gehen. Da nun hier zwei von diesen Linien, A′B und D′E, einander parallel sind, so kann nur das Erstere eintreten, und jede von ihnen ist mit der dritten Linie, d. i. mit der Durchschnitts-Linie der beiden Ebenen A′BC″ und D′EF″, parallel.

§. 14.

Parallele Ebenen.

Die Aufgabe, **eine Ebene zu zeichnen, welche einer gegebenen Ebene parallel ist,** bleibt unbestimmt, so lange nicht ein Punkt außerhalb der Ebene gegeben ist, durch welchen

die gesuchte Ebene gehen soll. Ist A (Fig. 18) dieser Punkt, so ergeben sich sofort die Hauptschnitte der gesuchten Ebene; man hat dieselben so zu wählen, daß sie den im vorigen Paragraphen gefundenen Bedingungen der parallelen Lage, und zugleich den Bedingungen des §. 12 (betreffend die Lage eines Punktes in einer Ebene) entsprechen. Die Konstruktion ist nun folgende: Man lege durch A′ die Linie A′E parallel zu B′C, errichte in E auf MN ein Loth EF″, und lege durch A″ die Linie A″F″ parallel zu MN; diese Parallele schneidet dann jenes Loth in F″. Zieht man F″G parallel mit D″C, dann GH′ parallel mit CB′, so ist F″GH′ die gesuchte Ebene. Der bloße Anblick der Figur reicht schon hin, um darzuthun, daß die gestellten Bedingungen durch die Ebene F″GH′ vollständig erfüllt werden.

Soll **die Ebene parallel mit einer der beiden Projektions-Ebenen,** z. B. mit der Horizontal-Ebene, sein, so hat sie nach §. 10 nur einen, und zwar mit MN parallelen Hauptschnitt. Um ihn zu finden, lege man durch die ungleichnamige Projektion des Punktes, hier durch A″, die Linie B″C″ parallel mit MN; alsdann ist B″C″ jener Hauptschnitt. (Ist ohne Figur verständlich.)

§. 15.

Die Lage einer Linie gegen eine Ebene.

Eine Ebene ist gegeben und eine nicht in ihr liegende Linie. Die Linie wird entweder der Ebene parallel sein, oder die Ebene schneiden. Woran läßt sich die eine oder die andere dieser beiden Lagen erkennen? — Wenn die Linie die Ebene schneidet, so wird jede durch die Linie gelegte neue Ebene unter allen Umständen die anfängliche Ebene schneiden. Sobald es also möglich ist, die neue Ebene parallel der anfänglichen Ebene zu legen, kann mit Sicherheit angenommen werden, daß die Linie die anfängliche Ebene nicht schneidet, sondern ihr parallel ist. Ist A′BC″ (Fig. 19) die Ebene, und sind D′ und E″ die Durchgangs-Punkte der Linie, so stellt, wenn der Punkt F in der Axe MN beliebig angenommen wird, D′FE″ eine der neuen durch die Linie zu legenden Ebenen vor. Damit aber die Ebene D′FE″ mit A′BC″ parallel sei, muß gleichzeitig A′B mit D′F,

und BC'' mit FE'' parallel sein können. Hieraus ergiebt sich folgende Beantwortung der gestellten Frage: Man lege durch D' und E'' Parallelen bezüglich mit A'B und BC''. Wenn beide Parallelen die Axe MN in dem nämlichen Punkte F schneiden, so sind Linie und Ebene parallel; schneiden sie aber die Axe MN in verschiedenen Punkten, so wird die Ebene von der Linie geschnitten.

§. 16.

Der Durchschnitt einer Linie mit einer Ebene.

Man soll, wenn eine Ebene von einer Linie geschnitten wird, den Durchschnitts-Punkt bestimmen. — Hierzu bediene man sich folgender Ueberlegung: Wird durch die Linie eine ganz beliebige Ebene gelegt, so wird diese Ebene den gesuchten Durchschnitts-Punkt enthalten; sie wird ferner die gegebene Ebene schneiden, und zwar wird die entstandene Durchschnitts-Linie ebenfalls den gesuchten Punkt enthalten. Derselbe liegt demnach da, wo diese Durchschnitts-Linie die anfängliche Linie schneidet, und kann nach §. 8 ohne Schwierigkeit bestimmt werden. — Hieraus ergiebt sich die folgende Konstruktion: Es sei A'BC'' (Fig. 20) die Ebene, ferner seien D' und E'' die Durchgangs-Punkte der Linie. Man lege E''H parallel mit BC'', und ziehe HD', welche BA' in J' schneidet. Dann ziehe man J'K' parallel und J'L senkrecht zu MN, endlich LO'' parallel zu BC''. Die beiden Schnitt-Punkte R' und R'' sind die Projektionen des gesuchten Durchschnitts-Punktes. Um die Genauigkeit der Zeichnung zu prüfen, bemerke man, daß die Linie R'R'' die Axe MN rechtwinklig durchschneiden muß. — Das Verständniß dieser Konstruktion möge der Anfänger aus folgenden Bemerkungen entnehmen: Wo man auch den Punkt H annehmen möge, immer wird die Ebene E''HD' die gegebene Linie enthalten. Da aber überdies E''H mit BC'' parallel ist, so schneiden sich die Ebenen E''HD' und C''BA' in einer Linie, welche mit BC'' und E''H parallel ist. Also ist die horizontale Projektion dieses Durchschnittes parallel mit MN, die vertikale Projektion hingegen parallel mit BC''. Da überdies der Durchschnitt den Punkt J' als horizontalen Durchgangs-Punkt hat, so sind die Linien J'K' und LO'' ihre Projektionen. Die gegebene Linie aber hat die Pro-

jektionen D'G und E''F. Hiernach müssen sich für den Durchschnitts-Punkt die Projektionen R' und R'' ergeben.

Der in MN beliebig zu wählende Punkt H kann auch so angenommen werden, daß er mit G zusammenfällt. Alsdann ist E''GD' die zu legende Ebene. Für deren Durchschnitts-Linie mit A'BC'' sind beide Projektion leicht zu bestimmen: Die horizontale Projektion ist D'G und fällt mit der horizontalen Projektion der anfänglichen Linie zusammen; nur die vertikale Projektion wird von der gleichnamigen Projektion der gegebenen Linie geschnitten. (Der Anfänger beachte, daß der im §. 8 behandelte spezielle Fall von zwei sich schneidenden Linien eingetreten ist.)

§. 17.

Aufgaben, welche die senkrechte Lage von Linien und Ebenen zu einander betreffen.

Hier ist zuvörderst aus der Stereometrie der Satz hervor zu heben: **„Wenn eine Linie auf einer Ebene senkrecht steht, so steht die in einer zweiten Ebene liegende Projektion der Linie senkrecht auf der Durchschnitts-Linie der anfänglichen Ebene mit der zweiten Ebene."** — Wenn demnach die horizontale Projektion A'B' (Fig. 21) den horizontalen Hauptschnitt C'G, und die vertikale Projektion A''B'' den vertikalen Hauptschnitt D''G rechtwinklig durchschneidet, so steht die Linie AB senkrecht auf der Ebene C'GD''. — Hieraus ergiebt sich sofort die Lösung der beiden folgenden Aufgaben:

a. **durch einen, in oder außer einer Ebene liegenden Punkt eine Linie zu ziehen, welche auf der Ebene senkrecht steht; und**
b. **durch einen, in oder außer einer Linie liegenden Punkt eine Ebene zu legen, welche auf der Linie senkrecht steht.**

Bei der Behandlung der ersten Aufgabe sei A (Fig. 21) der Punkt, C'GD'' die Ebene. Man hat hier nur aus A' und A'' auf C'G und GD'' die Lothe A'F' und A''E'' zu fällen; beide Lothe sind die Projektionen der verlangten Linie. — Handelt es sich um

Lösung der zweiten Aufgabe, so fälle man aus einem beliebigen Punkte G (Fig. 21) der Projektions-Axe auf die beiden Projektionen der Linie AB die Lothe GF' und GE''. Alsdann wird die Ebene F'GE'' auf der Linie AB senkrecht stehen, und ein Gleiches wird von derjenigen Ebene gelten, welche man, unter Anwendung von §. 14, durch den gegebenen (in der Figur nicht gezeichneten) Punkt parallel mit der Ebene F'GE'' legt. Die zuletzt gelegte Ebene ist die gesuchte.

An die Lösung dieser beiden Aufgaben knüpft sich die **Bestimmung der Entfernung eines Punktes von einer Ebene oder von einer Linie.** — Soll die Entfernung eines Punktes von einer Ebene angegeben werden, so handelt es sich um die Länge des aus dem Punkte auf die Ebene gefällten Lothes. Man fällt daher zuerst (nach a) dieses Loth; sucht dann, indem man seinen Durchschnitt mit der Ebene bestimmt (§. 16), den Fußpunkt; und ermittelt endlich (§. 7) die Entfernung dieses Fußpunktes von dem gegebenen Punkte. — Ist dagegen die Entfernung des Punktes von einer Linie zu bestimmen, so durchschneidet man die Linie vermittelst einer durch den Punkt (nach b) senkrecht auf die Linie gelegten Ebene. Die Entfernung des entstandenen Durchschnitts-Punktes von dem gegebenen Punkte ist der verlangte Abstand.

Wie muß man verfahren, wenn man **die Entfernung zweier paralleler Ebenen von einander, oder die Entfernung zweier paralleler Linien von einander bestimmen soll?**

§. 18.

Bestimmung des von zweien sich schneidenden Ebenen eingeschlossenen Flächen-Winkels.

Das Maaß des zu bestimmenden Flächen-Winkels ist gleich dem Maaße desjenigen Linien-Winkels, dessen Schenkel, einzeln genommen, auf den bezüglichen Schenkeln des Flächen-Winkels senkrecht stehen. Man darf daher nur, mittelst zweimaliger Anwendung der ersten Aufgabe des vorigen Paragraphen, von einem beliebigen Scheitel-Punkte ausgehend die Schenkel des bezeichneten Linien-Winkels und somit diesen selbst

konstruiren. — Einen Linien-Winkel zu gleichem Gebrauche erhält man, wenn man jede der beiden sich schneidenden Ebenen vermittelst ein und der nämlichen dritten Ebene, welche auf der Durchschnitts-Linie senkrecht stehen muß, schneidet. Die hierbei entstehenden Durchschnitts-Linien sind die Schenkel des Linien-Winkels. — Obgleich die zur Ausführung der letzteren Konstruktion erforderlichen Vorbereitungen sämmtlich Statt gefunden haben, so ist doch nicht zu verkennen, daß sie an Einfachheit der ersteren weit nachsteht. Der Aufmerksamkeit des Lernenden wird es nicht entgehen, daß sich häufig der Fall darbietet, daß die Lösung einer Aufgabe auf mehrfache Weise vollzogen werden kann. In einem solchen Falle wird er sich klar zu machen haben, welche der verschiedenen Lösungen ein möglichst geringes Quantum von Vorkenntnissen und Konstruktionen erfordert. Uebrigens ist dem Anfänger zur heilsamen Uebung anzurathen, die Bestimmung der bezeichneten Linien-Winkel nach jeder der beiden Lösungen durch wirkliche Zeichnung auszuführen.

§. 19.

Projektion einer Linie auf eine Ebene; ihre Neigung gegen die Ebene.

Steht eine Linie auf einer Ebene senkrecht, so steht auch jede durch die Linie gelegte Ebene auf der anfänglichen Ebene senkrecht. Wenn dagegen die Linie auf der Ebene nicht senkrecht seht, so kann durch sie nur eine einzige Ebene senkrecht auf die anfängliche Ebene gelegt werden. Um diese zu finden, hat man zuvörderst (nach §. 17) eine Linie zu bestimmen, welche durch einen beliebigen Punkt A der gegebenen Linie AB geht und auf der gegebenen Ebene C′DE″ senkrecht steht. Es sei AF diese Linie. Die durch AB und AF gelegte Ebene BAF steht dann auf C′DE″ senkrecht, weil sie durch das Loth AF gelegt ist. Bestimmt man den Durchschnitt der Ebene BAF mit der anfänglichen Ebene C′DE″, so erhält man **die Projektion der Linie AB auf die Ebene C′DE″**; die Ebene BAF selbst ist die projicirende Ebene. Der Winkel, welchen die Linie AB mit ihrer Projektion bildet, ist **der Neigungs-Winkel von AB gegen die Ebene C′DE″**.

Wenn es sich lediglich um **Bestimmung dieses Neigungs-Winkels** handelt, und nicht auch die Projektion der Linie AB auf die Ebene C′DE″ gesucht wird, so ist man

hierzu schon sofort im Stande, nachdem man die Senkrechte AF gefunden hat. Der Winkel nämlich, welchen AF und AB einschließen, ergänzt den verlangten Neigungs-Winkel zu einem Rechten. Hat man daher jenen Winkel bestimmt, so kann man sofort diesen Neigungs-Winkel angeben.

Der Verfasser hat zu vorstehender Darstellung keine Figur gegeben. Die Fassung des Textes reicht aus, um den mit dem Bisherigen vertraut gewordenen Leser zur Ausführung der Zeichnung zu befähigen. Besonderes Interesse kann es dabei gewähren, zu beachten, daß der in AB anzunehmende Punkt beliebig ist, daß sich also aus der Zeichnung bei jeder Annahme desselben die nämliche projicirende Ebene ergeben muß.

§. 20.

Erkennung der senkrechten Lage zweier Linien oder zweier Ebenen gegen einander.

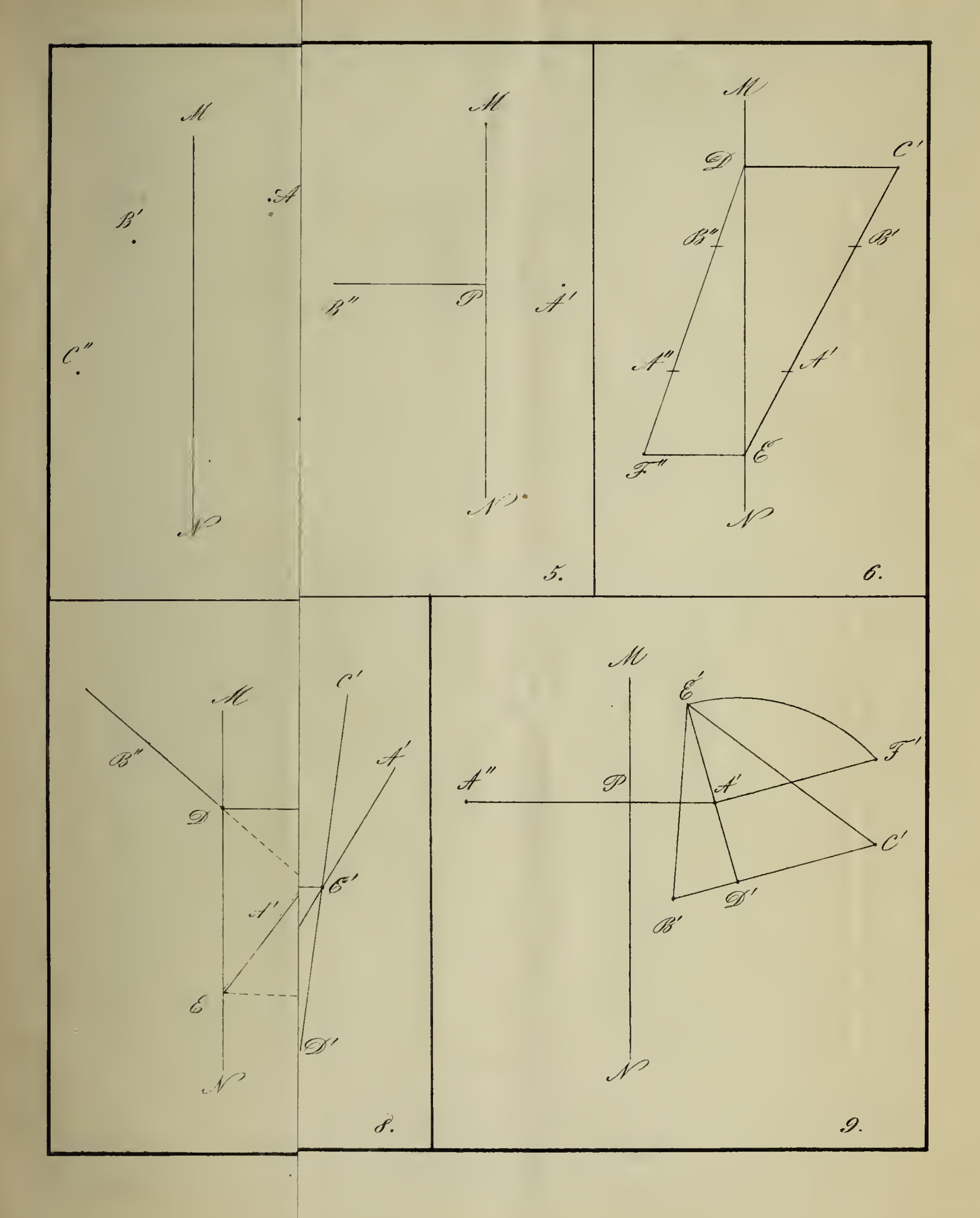
Die Frage, **ob auf einer gegebenen Linie eine zweite Linie senkrecht steht,** kann zwar mit Hülfe von §. 9 durch Bestimmung des von beiden Linien gebildeten Winkels beantwortet werden. Die so eben mitgetheilten Entwickelungen geben indessen noch eine weitere Lösung an die Hand. Die zweite Linie wird nämlich dann auf der ersten Linie senkrecht stehen, wenn es möglich ist, durch die zweite Linie eine auf der ersten Linie senkrechte Ebene zu legen (weil dann die erste Linie auf jeder in dieser Ebene beliebig angenommenen Linie senkrecht steht.) Hieraus ergiebt sich mit Leichtigkeit folgende Konstruktion: Es sei AB (Fig. 21) die erste Linie; ferner seien C′ und D″ die Durchgangs-Punkte der zweiten Linie. Man fälle aus C′ auf A′B′ das Loth C′F′, und aus D″ auf A″B″ das Loth D″E″. Wenn dann die Lothe C′F′ und D″E″ die Axe MN in den nämlichen Punkte G schneiden, so ist D″GC′ eine auf AB senkrechte und die zweite Linie enthaltende Ebene; diese zweite Linie selbst ist also auf AB senkrecht. — Da die Beziehung zwischen beiden Linien eine wechselseitige ist, so ergiebt sich noch ein zweites Verfahren, indem man die auf beide Linien bezüglichen Data der Aufgabe unter einander vertauscht. Wenn die Zeichnungen mit Sorgfalt ausgeführt wurden, so darf das Resultat des zweiten Verfahrens mit dem des ersten nicht in Widerspruch stehen.

Ob **zwei Ebenen auf einander senkrecht stehen,** läßt sich nun auch entscheiden, indem man aus einem beliebigen Punkte auf jede derselben ein Loth fällt. Stehen dann beide Lothe auf einander senkrecht, so gilt ein Gleiches von den Ebenen. — Einen zweiten Weg hierzu zeigt der ganz zu Anfange des §. 19 citirte stereometrische Satz, dem man folgende Fassung geben kann: „Wenn ein durch einen beliebigen Punkt der Durchschnitts-Linie zweier Ebenen auf die erste Ebene errichtetes Loth ganz in der zweiten Ebene liegt, so steht diese zweite Ebene auf der ersten Ebene senkrecht." Die weitere Ausführung der hieraus sich ergebenden Konstruktion kann unterbleiben. Der Leser wird im Stande sein, den einzuschlagenden Weg schrittweise festzustellen und demnächst das Erforderliche auszuführen.

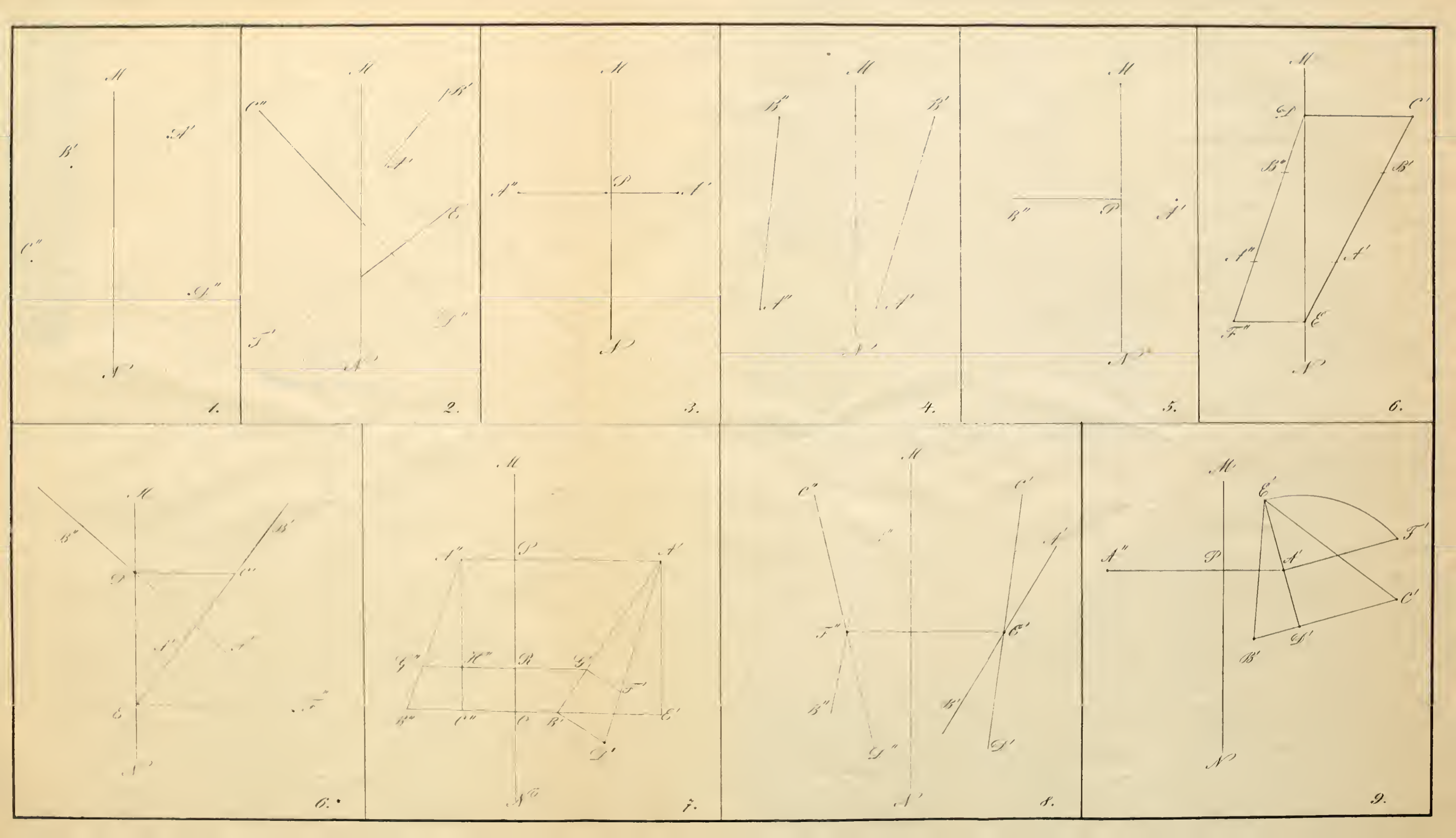
* * *

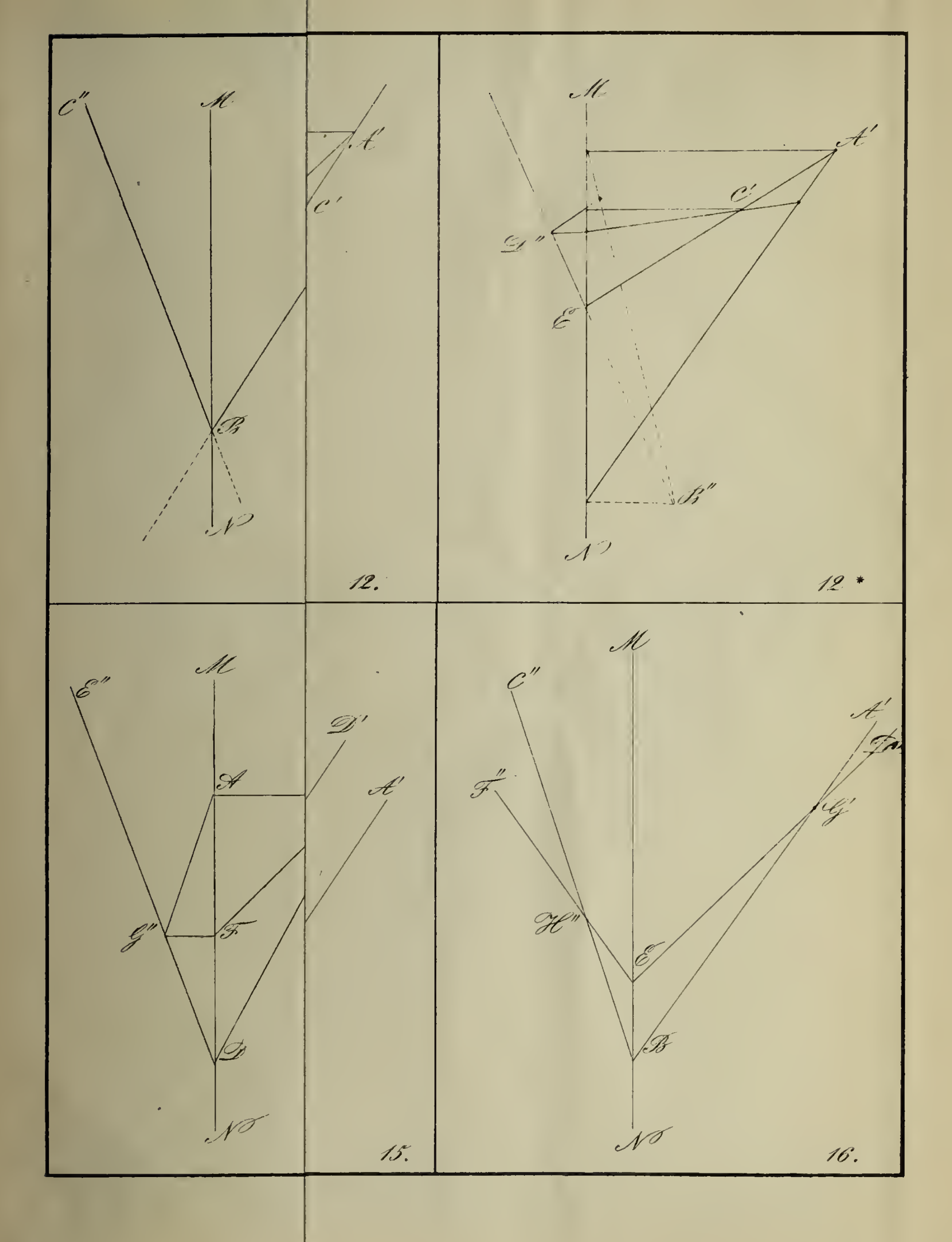
Wir verlassen hierbei diesen Gegenstand. Dem Leser, welcher uns bis hierher gefolgt ist, wird es eine nützliche Uebung gewähren, wenn er einzelne der behandelten Gegenstände mit Rücksicht auf die am Schlusse des §. 2 gemachte Bemerkung nochmals durchgeht und die zugehörigen Zeichnungen selbstständig entwirft. Die Darstellung von Punkten und Linien in den dort angezeigten veränderten Situationen kann nicht verfehlen, auf den Zusammenhang des Ganzen ein neues Licht zu werfen und den Leser noch weiter und tiefer in den Gegenstand einzuführen.

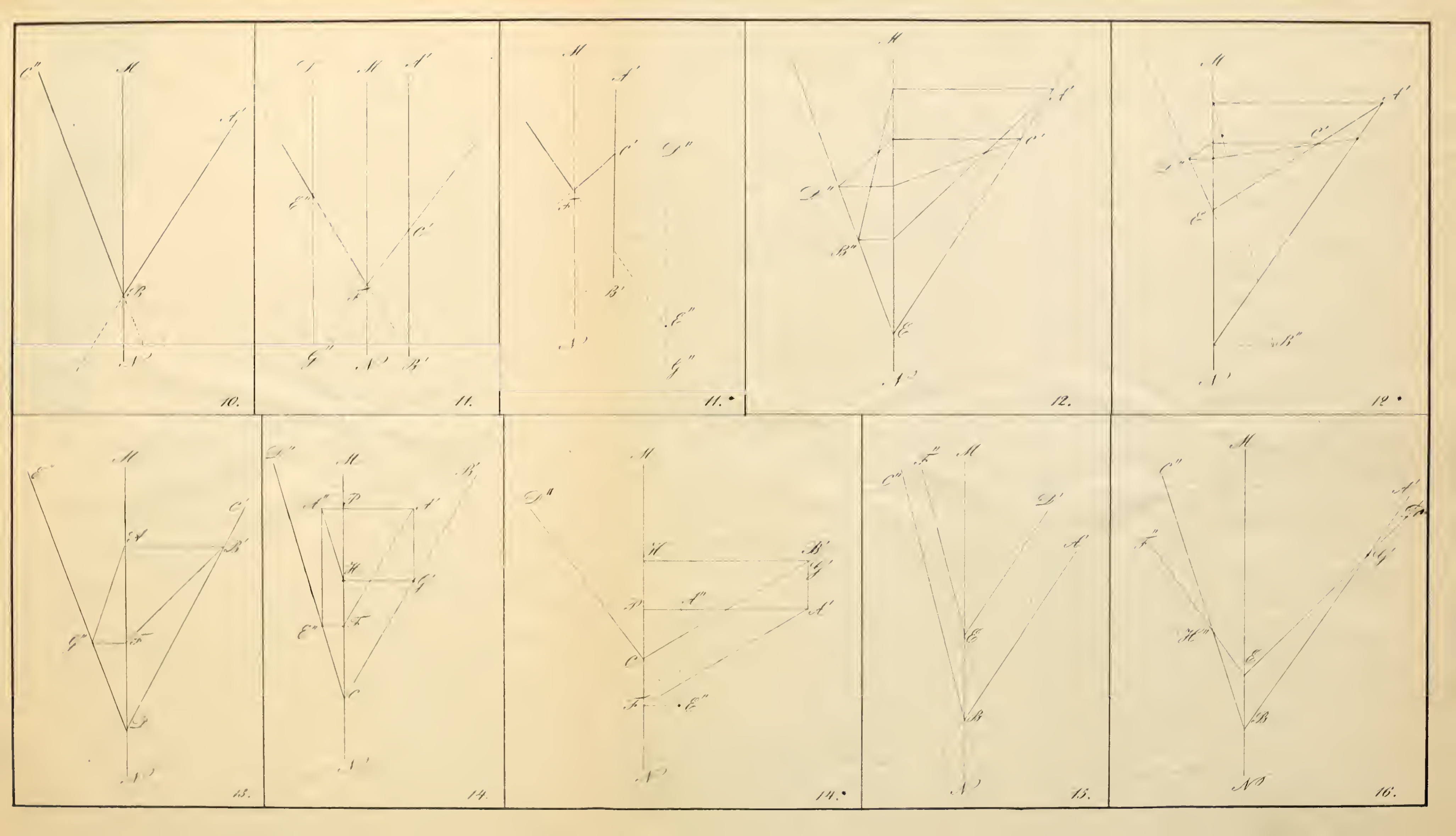
Die Natur der Sache hat es mit sich gebracht, daß von stereometrischen Begriffen und hierauf sich gründenden Lehrsätzen in diesem Abrisse häufig Gebrauch gemacht wurde. Diesem ist vielleicht der Standpunkt des Lernenden nicht immer entsprechend. Am meisten fortschreitend und ergiebig wird der Unterricht in der beschreibenden Geometrie allerdings dann sein, wenn ihm ein vollständiger Unterricht in der Stereometrie vorangegangen ist. Wenn Letzteres nicht der Fall ist, so kann immerhin vorläufig auch ein (weniger wissenschaftliches, sondern) mehr anschauliches Verständniß erstrebt werden. Nach späterer Absolvirung der Stereometrie wäre dann dem Schüler zu empfehlen, das Gebiet der beschreibenden Geometrie einem nochmaligen Studium zu unterwerfen.

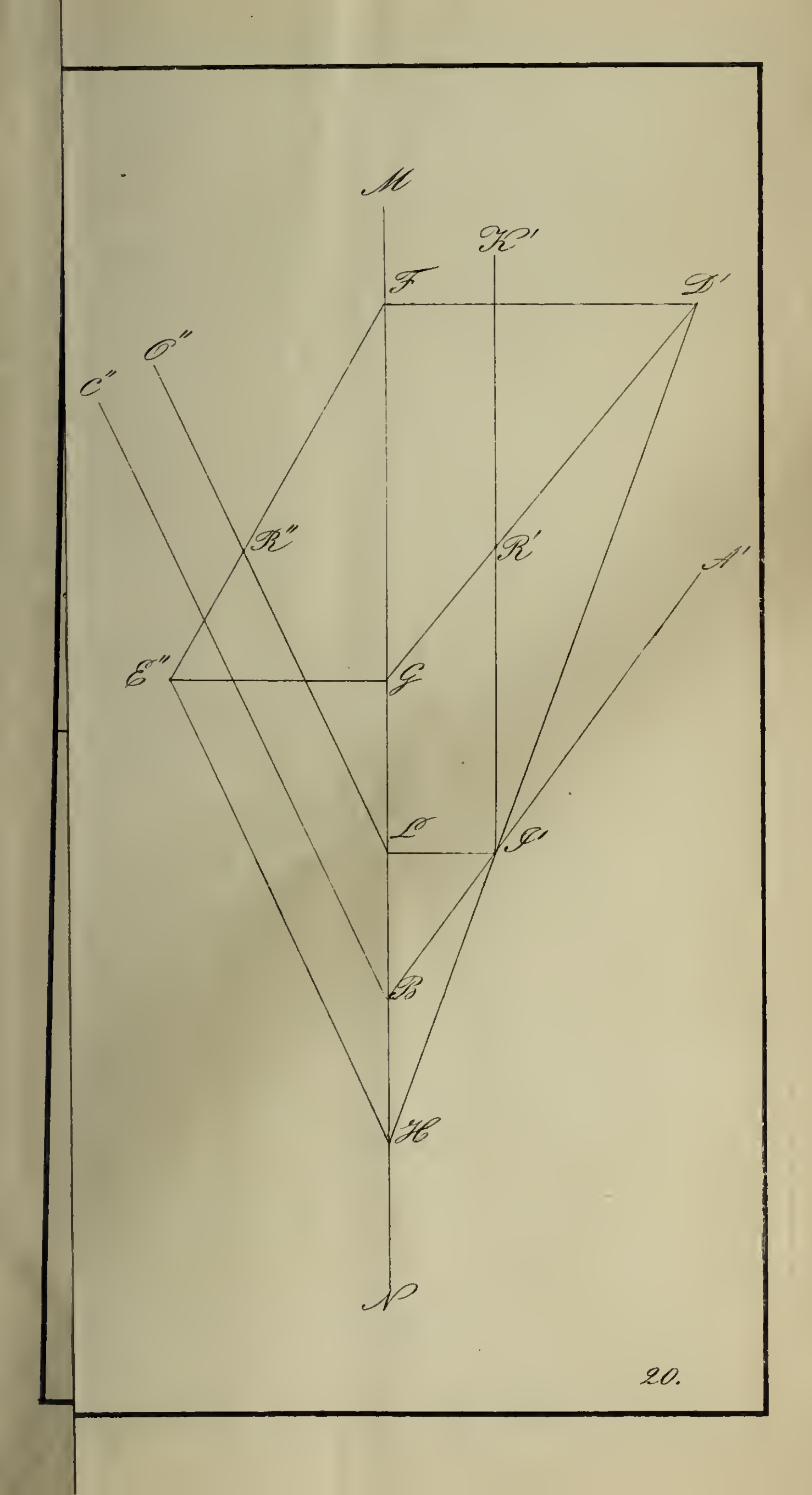


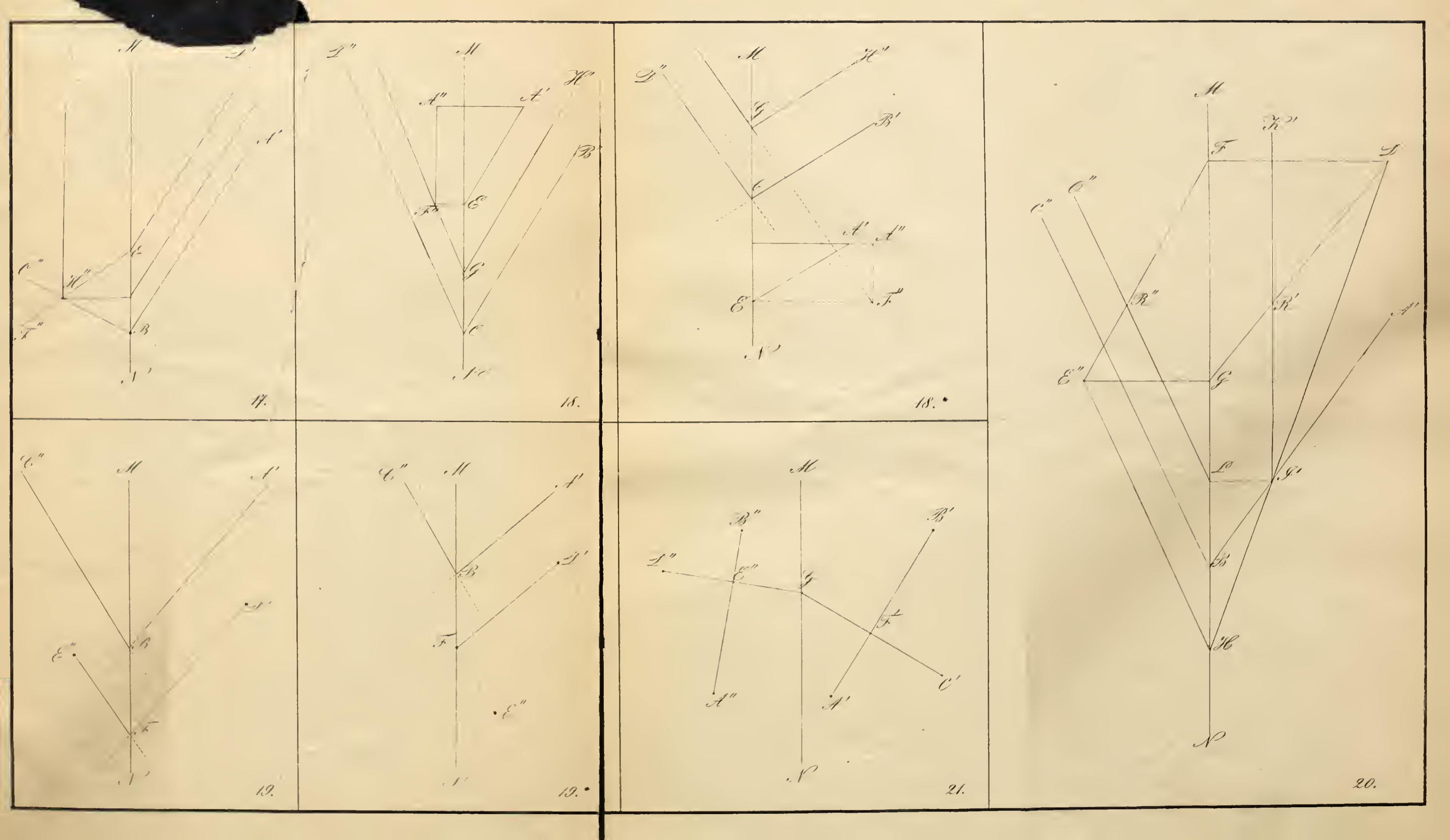
M
B'
A
C''
N
M
B''
P
A'
N
5.
M
D
C'
B''
B'
A''
A'
F''
E
N
6.
M
C'
A'
B''
D
E'
A'
E
D'
N
8.
M
E'
F'
A''
P
A'
C'
D'
B'
N
9.


1.
2.
3.
4.
5.
6.
6.
7.
8.
9.


C''
M
A'
C'
B
N
12.
M
A'
C'
D''
E
B''
N
12.*
E''
M
D'
A
A'
G''
F
D
N
15.
M
C''
A'
F''
G'
H''
E
B
N
16.




M
K'
F
D'
O''
C''
R''
R'
A'
E''
G
L
I'
B
H
N
20.


17.
18.
18.*
19.
19.*
21.
20.